

**stichting  
mathematisch  
centrum**



---

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 78/73

DECEMBER

O. DIEKMANN  
BIJNA VRIJE GRENSLAGEN

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM  
AMSTERDAM

---

**2e boerhaavestraat 49 amsterdam**

*Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.*

*The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.*

---

AMS (MOS) subject classification scheme (1970): 35B25,35B30,35B40

---

## Samenvatting

Bij de constructie van een asymptotische benadering voor de oplossing van een singulier storingsprobleem voor een lineaire differentiaalvergelijking van het elliptische type speelt het een belangrijke rol of al dan niet een deel van de rand van het beschouwde gebied samenvalt met een karakteristiek van de gereduceerde vergelijking (zie bv. [4]). Men verkrijgt dan twee typen asymptotische oplossingen.

In het algemeen zal de exacte oplossing als functie van die coëfficiënten, die de karakteristieken bepalen, een continu verloop hebben (uniform in de plaatscoördinaten; het probleem is regulier met betrekking tot deze coëfficiënten).

Voor een eenvoudig geval, dat veelvuldig als modelprobleem wordt behandeld, is deze schijnbare tegenspraak nader onderzocht. Het blijkt dat, indien we het al dan niet samenvallen van karakteristieken en randen laten afhangen van een parameter  $\mu$ , de convergentie van de oplossing voor  $\varepsilon \downarrow 0$  niet alleen niet-uniform is met betrekking tot de coördinaten (het kenmerk van een singulier storingsprobleem) maar ook met betrekking tot  $\mu$ . Door een "locale" parameter in te voeren, wordt het mogelijk ook deze vorm van niet-uniformiteit te onderzoeken.



<u>Inhoud</u>	blz.
1. Inleiding	1
2. De exacte oplossing	3
3. Het maximum principe en enkele gevolgen	5
4. Overzicht van de singuliere storingstheorie	14
5. De parabolische grenslaag	17
6. De vrije grenslaag	20
7. Vergelijking van vrije en parabolische grenslaag	23
8. De bijna vrije grenslaag	24
9. De gegeneraliseerde parabolische grenslaag	27
10. Vergelijking van de verschillende grenslagen	29
11. Conclusies	34
Appendix	35
Literatuur	37



## 1. Inleiding

Beschouw het Dirichlet probleem voor de tweede orde lineaire elliptische differentiaalvergelijking

$$(1.1) \quad L_{\varepsilon, \mu}[\Phi] = (\varepsilon \Delta - D_{\mu})[\Phi] = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

in een gebied

$$(1.2) \quad G = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Hierin staat  $\Delta$  voor de Laplace operator in twee dimensies en  $D_{\mu}$  voor een eerste orde differentiaal operator met constante coëfficiënten:

$$(1.3) \quad D_{\mu} = \mu \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c, \quad c \geq 0.$$

De randvoorwaarden

$$(1.4a) \quad \Phi(x, 0) = 0, \quad x > 0,$$

$$(1.4b) \quad \Phi(0, y) = f(y), \quad y > 0,$$

$$f \text{ continu en begrensd voor } y \rightarrow \infty, f(0) \neq 0,$$

worden aangevuld met een nog te bespreken groeiconditie voor  $\Phi$  (zie paragraaf 3). Voor een bewijs van de existentie van een oplossing zij verwezen naar [2], Ch. IV. Uniciteit van de oplossing zal in paragraaf 3 bewezen worden.

De oplossing heeft een bekende grenslaagstructuur. Het type en de plaats van de grenslaag hangen af van de karakteristieken van de gereduceerde vergelijking  $D_{\mu}[\Phi] = 0$ . Dit zijn de lijnen

$$(1.5) \quad x = \frac{\mu}{b} y + \text{constante}.$$

Beschouwen we  $b$  als een vast positief getal en  $\mu$  als een parameter dan kunnen we de volgende drie gevallen onderscheiden (zie bv. [4]):

1.  $\mu < 0$  : gewone grenslaag langs de rand  $x = 0$ ,
2.  $\mu = 0$  : parabolische grenslaag langs de rand  $x = 0$ ,
3.  $\mu > 0$  : vrije grenslaag langs de karakteristiek  $bx = \mu y$ .

(voor een verklaring van de termen zie paragraaf 4).

In paragraaf 3 zal bewezen worden dat de exacte oplossing continu afhangt van de parameter  $\mu$ . Construeren we met behulp van de methode van coördinaat-strekking en aansluiting (stretching and matching) een asymptotische benadering voor de bovengenoemde drie gevallen, dan is de continue afhankelijkheid verdwenen.

In [7] heeft J. Grasman aangetoond dat deze tegenspraak voor wat betreft de overgang van gewone naar parabolische grenslaag opgeheven kan worden door de parameter  $\mu$  in de buurt van  $\mu = 0$  "op te blazen", dat wil zeggen door ook waarden van  $\mu$  te beschouwen die  $O(\epsilon^\gamma)$ ,  $\gamma > 0$  zijn.

Het is onze opzet hetzelfde te doen voor de overgang van parabolische naar vrije grenslaag. De enige reden om hierbij een onbegrensd gebied te kiezen is dat zodoende alle locale benaderingen van belang zijn voor de overgang. De essentiële kenmerken van de overgang zijn bij een begrensd gebied precies hetzelfde.

We zullen niet daadwerkelijk uniforme benaderingen construeren en de geldigheid daarvan bewijzen aangezien dit voor het gestelde doel niet van belang is. Voor volkomen equivalente constructies en bewijzen verwijzen we naar [11]. Wel zullen bij de behandeling van de uniciteit en de continue afhankelijkheid van  $\mu$  in paragraaf 3 de stellingen, waarop de bewijzen berusten, genoemd dan wel bewezen worden.



## 2. De exacte oplossing

We zullen allereerst voor het probleem (1.1) - (1.4) een representatie van de exacte oplossing construeren. Daartoe voeren we door middel van de substitutie

$$(2.1) \quad \Phi = e^{\frac{\mu x + by}{2\epsilon}} \Psi$$

vergelijking (1.1) over in een Helmholtz vergelijking. Zij

$$(2.2) \quad \omega_0^2 = \frac{\mu^2 + b^2}{4\epsilon^2} + c, \quad \omega_1 = \frac{b}{2\epsilon},$$

dan volgt

$$(2.3) \quad \begin{cases} \Delta \Psi - \omega_0^2 \Psi = 0 \\ \Psi(x, 0) = 0, \end{cases} \quad \Psi(0, y) = f(y) e^{-\omega_1 y}.$$

Stel nu

$$(2.4) \quad \Psi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega_0(xchu - iyshu)} g(u) dshu,$$

dan blijkt uit

$$\Psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega_0 xchu} g(u) dshu$$

dat  $g(u)$  oneven moet zijn, terwijl men eenvoudig nagaat dat voor willekeurige  $g(u)$  aan de differentiaalvergelijking is voldaan.

De functie  $f(y)\exp(-\omega_1 y)$  is alleen gedefinieerd voor  $y \geq 0$ , maar wij denken ons deze functie voor  $y < 0$  oneven voortgezet. Uit

$$\Psi(0, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 yshu} g(u) dshu = f(y) e^{-\omega_1 y}$$

volgt dan

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad g(u) &= \frac{\omega_0}{2\pi} \left\{ \int_0^\infty e^{-\omega_1 y - i\omega_0 y \operatorname{sh} u} f(y) dy - \int_0^\infty e^{-\omega_1 y + i\omega_0 y \operatorname{sh} u} f(y) dy \right\} = \\
 &= \frac{\omega_0}{2\pi} \{ \bar{f}(\omega_1 + i\omega_0 \operatorname{sh} u) - \bar{f}(\omega_1 - i\omega_0 \operatorname{sh} u) \},
 \end{aligned}$$

waarbij  $\bar{f}$  de Laplace getransformeerde van  $f$  is. Aan de conditie dat  $g(u)$  oneven moet zijn is voldaan.

Een speciaal geval, waar wij nog mee te maken zullen krijgen, doet zich voor als  $f$  constant is, bijvoorbeeld  $f(y) = 1$ . Dan:

$$(2.6) \quad g(u) = \frac{\omega_0}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\omega_1 + i\omega_0 \operatorname{sh} u} - \frac{1}{\omega_1 - i\omega_0 \operatorname{sh} u} \right\} = \frac{1}{\pi i} \frac{\operatorname{sh} u}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 + \operatorname{sh}^2 u}$$

en

$$(2.7) \quad \Phi(x, y) = \frac{1}{\pi i} e^{\frac{\mu x + by}{2\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{\mu^2 + b^2 + 4\epsilon^2 c} \operatorname{sh} u} \left( \frac{x \operatorname{ch} u - i y \operatorname{sh} u}{2\epsilon} \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u}{\frac{b^2}{\mu^2 + b^2 + 4\epsilon^2 c} + \operatorname{sh}^2 u} du.$$

In [15] en [16] geeft N.M. Temme voor een variant van dit geval een asymptotische ontwikkeling van de exacte oplossing, waarbij ook aan het probleem van de bijna-karakteristieke randen aandacht wordt besteed. Van enkele van zijn resultaten zullen wij gebruik maken in de appendix om te bewijzen dat aan bepaalde aansluitingsvoorwaarden is voldaan.

### 3. Het maximum principe en enkele gevolgen

In deze paragraaf formuleren wij het maximum principe en leiden daaruit stellingen af, waarop bewijzen van de geldigheid van uniforme asymptotische benaderingen, zoals bijvoorbeeld gegeven in [11], berusten. Ons hoofddoel is echter om te bewijzen dat de exacte oplossing van het probleem continu afhangt van de parameter  $\mu$ , en wel uniform in elk begrensde gebied.

#### Stelling 1

Zij  $L$  uniform elliptisch in een begrensde of onbegrensde gebied  $D$  en zij  $\Gamma$  een deel van  $\partial D$ . Veronderstel dat  $u$  voldoet aan

$$(L+h)[u] \geq 0 \text{ in } D, \quad u \leq 0 \text{ op } \Gamma.$$

Stel dat er een functie  $w(\vec{x})$  bestaat ( $\vec{x}$  een vector) met de eigenschappen:

$$\left\{ \begin{array}{l} w > 0 \text{ in } D \cup \partial D, \\ (L+h)[w] \leq 0 \text{ in } D, \\ \lim_{\vec{x} \rightarrow \partial D - \Gamma} w(\vec{x}) = \infty, \\ \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} w(\vec{x}) = \infty \text{ als } D \text{ onbegrensd is.} \end{array} \right.$$

Als  $u \leq 0$  op  $\partial D$  en

$$\liminf_{A \rightarrow \infty} \left[ \sup_{\substack{\vec{x} \in D \\ w(\vec{x})=A}} \frac{u(\vec{x})}{w(\vec{x})} \right] \leq 0,$$

dan geldt  $u \leq 0$  in  $D$ .

Bewijs: zie [14] blz.99. Het bewijs berust op het Phragmén-Lindelöf principe.  $\square$

In het volgende zij  $G = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$  en  $L$  een in  $G$  uniform elliptische tweede orde differentiaal operator. Zij  $w$  een functie als in Stelling 1 met betrekking tot  $L$  en  $G$ .

### Definitie

Een functie  $\phi$  behoort tot de klasse  $U$  als geldt dat  $\phi$  tweemaal differentieerbaar is en als

$$\liminf_{A \rightarrow \infty} \left[ \sup_{w=A} \frac{|\phi|}{w} \right] = 0.$$

### Stelling 2 (Maximum Principe)

Stel  $\phi \in U$  voldoet aan  $L[\phi] \geq 0$  in  $G$ ,  $\phi(x,0) \leq 0$ ,  $\phi(0,y) \leq 0$ . Dan geldt  $\phi \leq 0$  in  $G$ .

Bewijs: rechtstreeks toepassen van Stelling 1 voor dit speciale geval.  $\square$

### Stelling 3 (Uniciteit)

Stel  $\phi_1, \phi_2 \in U$  zijn oplossingen van het randwaardeprobleem

$$L[\phi] = f \text{ in } G, \phi(x,0) = g(x), \phi(0,y) = h(y).$$

Dan geldt  $\phi_1 \equiv \phi_2$  in  $G$ .

Bewijs: Beschouw  $w_{\pm} = \pm(\phi_1 - \phi_2)$  dan geldt:

$$L[w_{\pm}] = 0 \text{ in } G, w_{\pm}(x,0) = 0, w_{\pm}(0,y) = 0, w_{\pm} \in U,$$

zodat  $w_{\pm} \leq 0$  in  $G$  (Stelling 2) en dus  $\phi_1 \equiv \phi_2$ .  $\square$

### Stelling 4 (Barrière-functie)

Stel  $\phi, \psi \in U$  voldoen aan

$$|L[\phi]| \leq -L[\psi] \text{ in } G, \quad |\phi(x,0)| \leq \psi(x,0), \quad |\phi(0,y)| \leq \psi(0,y),$$

dan geldt  $|\phi| \leq \psi$  in  $G$ .

Bewijs: Beschouw  $w_{\pm} = \pm\phi - \psi$  dan geldt:

$$L[w_{\pm}] \geq 0 \text{ in } G, \quad w_{\pm}(x,0) \leq 0, \quad w_{\pm}(0,y) \leq 0,$$

zodat  $w_{\pm} \leq 0$  in  $G$  (Stelling 2) en dus  $|\phi| \leq \psi$  in  $G$ .  $\square$

Zij nu  $L$  met name  $L_{\varepsilon,\mu}$  uit (1.1), met  $\mu, b \geq 0$ , en zij per definitie

$$(3.1) \quad L_{\varepsilon,\mu}^* = \varepsilon \Delta - \frac{\mu^2 + b^2 + 4\varepsilon c}{4\varepsilon}.$$

Als  $\phi$  voldoet aan  $L_{\varepsilon,\mu}[\phi] = 0$  en we definiëren  $\phi = \psi \exp((\mu x + by)/2\varepsilon)$  dan voldoet  $\psi$  aan  $L_{\varepsilon,\mu}^*[\psi] = 0$ . Beschouw  $L_{\varepsilon,\mu}[u] = 0$  en stel

$$u = w(r) \exp\left(\frac{\mu \cos\theta + b \sin\theta}{2\varepsilon} r\right),$$

met  $x - x_0 = r \cos\theta$  en  $y - y_0 = r \sin\theta$ , dan volgt

$$\varepsilon \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\varepsilon}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{\mu^2 + b^2 + 4\varepsilon c}{4\varepsilon} w = 0.$$

Aan deze vergelijking voldoen de gemodificeerde Bessel-functies

$$I_0\left(\sqrt{\mu^2 + b^2 + 4\varepsilon c} \frac{r}{2\varepsilon}\right) \text{ en } K_0\left(\sqrt{\mu^2 + b^2 + 4\varepsilon c} \frac{r}{2\varepsilon}\right).$$

Aangezien geldt  $I_0 > 0$ ,  $K_0 > 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} I_0(r) = \infty$ ,  $\lim_{r \rightarrow 0} K_0(r) = \infty$ , gaan we over tot de volgende

### Definities

$$W_{\mu}^*(r) = I_0\left(\sqrt{\mu^2 + b^2 + 4\varepsilon c} \frac{r}{2\varepsilon}\right) + K_0\left(\sqrt{\mu^2 + b^2 + 4\varepsilon c} \frac{r}{2\varepsilon}\right),$$

$$W_{\mu}(r, \theta) = W_{\mu}^*(r) \exp\left\{(\mu \cos\theta + b \sin\theta) \frac{r}{2\varepsilon}\right\}.$$

Een functie  $\phi$  behoort tot de klasse  $U_{\mu}^{(*)}$  als geldt:

1)  $\phi$  is tweemaal differentieerbaar

$$2^{(*))} \quad \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \sup_{W_{\mu}^{(*)}=A} \frac{|\phi|}{W_{\mu}^{(*)}} \right] = 0.$$

Met  $(*)$  wordt hier en in de rest van deze paragraaf bedoeld dat men ofwel overal een  $*$  moet lezen, ofwel deze overal moet weglaten.  $2^*$  is equivalent met

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\phi|}{W_{\mu}^*(r)} = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\phi|}{W_{\mu}^*(r)} = 0.$$

De stellingen 2, 3 en 4 zijn nu geldig indien we voor  $L$  en  $U$  lezen  $L_{\varepsilon, \mu}^{(*)}$  en  $U_{\mu}^{(*)}$ . Tevens hebben we gevonden welke groei-conditie aan de randvoorwaarden (1.4) toegevoegd moet worden om uniciteit te waarborgen, namelijk  $\phi \in U_{\mu}$ .

Uit  $K_0(z) \sim_{|z| \rightarrow 0} -\ln(z)$  volgt dat we met behulp van  $K_0$  een fundamentele oplossing voor  $L_{\varepsilon, \mu}^{(*)}$  kunnen construeren.

### Definities

$$S_{\mu}^*(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sqrt{\mu^2 + b^2 + 4\varepsilon c} \frac{r}{2\varepsilon}),$$

$$S_{\mu}(x, y; \xi, \eta) = S_{\mu}^*(x, y; \xi, \eta) \exp\{(\mu \cos \theta + b \sin \theta) \frac{r}{2\varepsilon}\},$$

waarbij  $x - \xi = r \cos \theta$ ,  $y - \eta = r \sin \theta$ . Indien

$$g^{(*)}(x, y) = \iint_G S_{\mu}^{(*)}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

bestaat, dan geldt

$$L_{\varepsilon, \mu}^{(*)}[g^{(*)}(x, y)] = -\varepsilon f(x, y).$$

De nu volgende stelling is essentieel bij het bewijzen van de geldigheid van een uniforme asymptotische ontwikkeling.

Stelling 5

Stel  $\phi \in U_{\mu}^{(*)}$  voldoet aan  $L_{\varepsilon, \mu}^{(*)}[\phi] = -h_{\varepsilon}(x, y)$  in  $G$ . Als voor  $\varepsilon$  voldoende klein geldt:

$$\iint_G S_{\mu}^{(*)}(x, y; \xi, \eta) |h_{\varepsilon}(\xi, \eta)| d\xi d\eta = O(\varepsilon^{\mu+1}),$$

$$|\phi(x, 0)| = O(\varepsilon^{\nu}), \quad |\phi(0, y)| = O(\varepsilon^{\nu}),$$

dan geldt

$$|\phi(x, y)| = O(\varepsilon^{\min(\mu, \nu)}) \quad \text{in } G.$$

Bewijs: Stel  $M_1$  is zodanig dat

$$\iint_G S_{\mu}^{(*)}(x, y; \xi, \eta) |h_{\varepsilon}(\xi, \eta)| d\xi d\eta \leq M_1 \varepsilon^{\mu+1},$$

en  $M_2$  zodanig dat

$$|\phi(x, 0)| \leq M_2 \varepsilon^{\nu}, \quad |\phi(0, y)| \leq M_2 \varepsilon^{\nu}.$$

Beschouw

$$\psi^{(*)}(x, y) = \frac{1}{\varepsilon} \iint_G S_{\mu}^{(*)}(x, y; \xi, \eta) |h_{\varepsilon}(\xi, \eta)| d\xi d\eta + M_2 \varepsilon^{\nu},$$

dan geldt

$$L_{\varepsilon, \mu}^{(*)}[\psi^{(*)}] = -|h_{\varepsilon}(x, y)|,$$

$$\psi^{(*)}(x, 0) \geq M_2 \varepsilon^{\nu}, \quad \psi^{(*)}(0, y) \geq M_2 \varepsilon^{\nu},$$

zodat  $|\phi| \leq \psi^{(*)}$  (Stelling 4,  $\psi^{(*)}$  is een barrière-functie voor  $\phi$ ). Uit

$$\psi^{(*)} \leq M \varepsilon^{\min(\mu, \nu)} \quad \text{met } M = \max(M_1, M_2),$$

volgt dan

$$|\phi| \leq M\epsilon^{\min(\mu, \nu)}, \quad \text{of} \quad |\phi| = O(\epsilon^{\min(\mu, \nu)}). \quad \square$$

De laatste stelling van deze paragraaf geeft een bovengrens voor de absolute waarde van het verschil van twee oplossingen van ons probleem, voor verschillende waarden van de parameter  $\mu$ , maar een vaste waarde van  $\epsilon$ , voor een willekeurig begreind gebied.

### Stelling 6

Stel  $\phi_i$  ( $i=1$  of  $2$ ) voldoet aan  $L_{\epsilon, a_i}[\phi_i] = 0$  in  $G$ ,  $\phi_i(x, 0) = 0$ ,  $\phi_i(0, y) = f(y)$ ,  $\phi_i \in U_{a_i}$ . Zij  $[\beta_1, \beta_2]$  een willekeurig interval op de positieve reële as, dan geldt dat voor vaste  $\epsilon > 0$  en een willekeurig begreind gebied  $D \subset G$  een positieve constante  $M$  te vinden is zodanig dat

$$|\phi_1 - \phi_2| \leq M |a_1^2 - a_2^2| \quad \text{uniform in } D, \quad \forall a_1, a_2 \in [\beta_1, \beta_2].$$

Bewijs: We nemen aan dat  $a_1 > a_2$ . Stel

$$\phi_i = \psi_i \exp\left(\frac{a_i x + by}{2\epsilon}\right),$$

dan voldoet  $\psi_i$  aan

$$L_{\epsilon, a_i}^*[\psi_i] = 0 \quad \text{in } G, \quad \psi_i \in U_{a_i}^*,$$

$$\psi_i(x, 0) = 0, \quad \psi_i(0, y) = f(y) \exp\left(-\frac{by}{2\epsilon}\right).$$

Beschouw  $\chi = \psi_1 - \psi_2$ , dan voldoet  $\chi$  aan

$$L_{\epsilon, a_1}^*[\chi] = \frac{a_1^2 - a_2^2}{4\epsilon} \psi_2, \quad \chi \in U_{a_1}^*,$$

$$\chi(x, 0) = 0, \quad \chi(0, y) = 0.$$



Stel

$$\rho(x,y) = \left| \frac{a_1^2 - a_2^2}{4\epsilon^2} \right| \iint_G s_{a_1}^*(x,y;\xi,\eta) |\psi_2(\xi,\eta)| d\xi d\eta,$$

dan geldt (indien de integraal bestaat):

$$L_{\epsilon, a_1}^*[\rho] = - \left| \frac{a_1^2 - a_2^2}{4\epsilon} \right| |\psi_2(x,y)|,$$

$$\rho(x,0) \geq 0, \quad \rho(0,y) \geq 0,$$

zodat  $|\chi| \leq \rho$  (Stelling 4).

We gaan nu eerst de convergentie na van

$$I_{a_1 a_2} = \iint_G s_{a_1}^*(x,y;\xi,\eta) |\psi_2(\xi,\eta)| d\xi d\eta.$$

Uit  $\psi_2 \in U_{a_2}^*$  volgt dat  $\forall \delta > 0 \quad \exists R_\delta$  zodat  $\forall r > R_\delta, \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$|\psi_2(r,\theta)| < \delta I_0(\sqrt{a_2^2 + b^2 + 4\epsilon c} \frac{r}{2\epsilon}).$$

$$I_{a_1 a_2} = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty K_0\left(\frac{\sqrt{a_1^2 + b^2 + 4\epsilon c}}{2\epsilon} \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)}\right) |\psi_2(r,\theta)| r dr d\theta.$$

Uit

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1^2 + b^2 + 4\epsilon c} \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)} &\geq \sqrt{a_1^2 + b^2 + 4\epsilon c} (r - r_0) = \\ &= \sqrt{a_2^2 + b^2 + 4\epsilon c} r + (\sqrt{a_1^2 + b^2 + 4\epsilon c} - \sqrt{a_2^2 + b^2 + 4\epsilon c}) r - \sqrt{a_1^2 + b^2 + 4\epsilon c} r_0 > \\ &> \sqrt{a_2^2 + b^2 + 4\epsilon c} r \end{aligned}$$

voor  $r > \frac{\sqrt{a_1^2 + b^2 + 4\epsilon c}}{\sqrt{a_1^2 + b^2 + 4\epsilon c} - \sqrt{a_2^2 + b^2 + 4\epsilon c}} r_0$ ,

(nl.  $a_1 > a_2$  !), en

$$I_0(z) \stackrel{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \quad K_0(z) \stackrel{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{2},$$

volgt dan de convergentie.

Stel vervolgens

$$I = \sup_{a_1 \in [\beta_1, \beta_2]} \sup_{a_2 \in [\beta_1, \beta_2]} I_{a_1 a_2},$$

$$N = \max_{(x,y) \in D} e^{\frac{\beta_2 x + by}{2\epsilon}},$$

$$M = \frac{IN}{4\epsilon},$$

dan

$$\begin{aligned} |\phi_1 - \phi_2| &= \left| \psi_1 e^{\frac{a_1 x + by}{2\epsilon}} - \psi_2 e^{\frac{a_2 x + by}{2\epsilon}} \right| \leq \\ &\leq e^{\frac{\beta_2 x + by}{2\epsilon}} |\psi_1 - \psi_2| \leq \\ &\leq NI_{a_1 a_2} \left| \frac{a_1^2 - a_2^2}{4\epsilon^2} \right| \leq \\ &\leq M |a_1^2 - a_2^2| \quad \forall a_1, a_2 \in [\beta_1, \beta_2], \text{ uniform in } D. \quad \square \end{aligned}$$

Zij nu  $\phi_{\epsilon, \mu}$  de exacte oplossing van het probleem (1.1)-(1.4) met  $\phi \in U_\mu$ , en zij  $\Psi_\mu$  een in  $G$  uniform geldige eerste orde asymptotische benadering voor  $\phi_{\epsilon, \mu}$ , dat wil zeggen

$$|\phi_{\epsilon, \mu} - \Psi_\mu| = O(\epsilon), \quad \text{uniform in } G.$$

Stel  $|\phi_{\epsilon, a_1} - \phi_{\epsilon, a_2}| < \delta$  dan

$$|\Psi_{a_1} - \Psi_{a_2}| \leq |\Psi_{a_1} - \phi_{\epsilon, a_1}| + |\phi_{\epsilon, a_1} - \phi_{\epsilon, a_2}| + |\phi_{\epsilon, a_2} - \Psi_{a_2}| < \delta + O(\epsilon),$$

zodat als  $\delta = O(\epsilon)$  ook

$$|\psi_{a_1} - \psi_{a_2}| = O(\varepsilon), \quad \text{uniform in } G.$$

Stel vervolgens dat in een (al dan niet van  $\varepsilon$  afhankelijk) gebied  $D \subset G$ ,  $\psi_\mu^D$  een locale eerste orde asymptotische benadering voor  $\Phi_{\varepsilon,\mu}$  is, dat wil zeggen

$$|\Phi_{\varepsilon,\mu} - \psi_\mu^D| = O(\varepsilon) \quad \text{in } D,$$

dan geldt evenzo

$$|\psi_{a_1}^{D_1} - \psi_{a_2}^{D_2}| = O(\varepsilon) \quad \text{in } D_1 \cap D_2,$$

mits  $|\Phi_{\varepsilon,a_1} - \Phi_{\varepsilon,a_2}| = O(\varepsilon)$  in  $D_1 \cap D_2$ .

#### 4. Overzicht van de singuliere storingstheorie

Zij gegeven

$$(4.1) \quad \begin{cases} \varepsilon L_2[\Phi_\varepsilon] + L_1[\Phi_\varepsilon] = 0 & \text{in een convex gebied } G, \\ \Phi_\varepsilon(x,y) = \Psi(x,y) & \text{op } \partial G, \end{cases}$$

waarbij  $L_2$  een elliptische tweede orde en  $L_1$  een eerste orde differentiaal operator is.

We zijn geïnteresseerd in asymptotische benaderingen voor  $\Phi_\varepsilon$  als  $\varepsilon \downarrow 0$ . Hierbij zullen we ons beperken tot eerste orde asymptotische benaderingen.

In (4.1) stelt men  $\varepsilon = 0$  waardoor de gereduceerde vergelijking  $L_1[\Phi] = 0$  ontstaat, met als oplossing  $\Phi = \Phi_0$ . Omdat  $\Phi_0$  de oplossing is van een differentiaalvergelijking van lagere orde dan de oorspronkelijke zal  $\Phi_0$  niet de oplossing zijn van (4.1). Wel is  $\Phi_0$  in een zeker gebied  $G_0 \subset G$  een reguliere benadering voor  $\Phi_\varepsilon$ , dat wil zeggen:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Phi_\varepsilon(x,y) = \Phi_0(x,y) \quad \text{voor } (x,y) \in G_0.$$

In de meeste gevallen zal slechts voor een gedeelte  $\Gamma$  van  $\partial G$  gelden

$$\Phi_0(x,y) = \Psi(x,y) \quad \text{voor } (x,y) \in \Gamma,$$

terwijl

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})} \Phi_0(x,y) \neq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Phi_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{voor } (\bar{x}, \bar{y}) \in \partial G - \Gamma,$$

hetgeen kenmerkend is voor een singulier storingsprobleem.

Het is dan nodig een zogenaamde grenslaagbenadering te construeren. Hiertoe voeren we eerst aan de rand aangepaste coördinaten

$$r = r(x,y), \quad z = z(x,y)$$

in, waarbij  $r$  gericht is langs de normaal van  $\partial G - \Gamma$  en  $z \perp r$ . Vervolgens gaan

we de omgeving van  $\partial G - \Gamma$  "uitvergrooten" door de coördinaat  $r$  "op te blazen", dat wil zeggen dat we een locale coördinaat

$$r = \rho \varepsilon^\alpha, \quad (\alpha > 0),$$

invoeren. De waarde van  $\alpha$  wordt zo gekozen dat  $\varepsilon L_2[\Phi_\varepsilon(\rho, z)]$  van dezelfde orde wordt als  $L_1[\Phi_\varepsilon(\rho, z)]$ . De oplossing  $\Phi^{(\alpha)}(\rho, z)$  van de getransformeerde vergelijking moet dan behalve aan de randvoorwaarde ook voldoen aan de zogenaamde aansluitingsvoorwaarde

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi^{(\alpha)}(\rho, z) = \lim_{r \rightarrow 0} \Phi_0(r, z).$$

Bij het berekenen van volgende benaderingen zowel als bij het toepassen van de afschattingstellingen uit paragraaf 3 treden afgeleiden van de grenslaagterm op. Er blijken dan punten te zijn waar deze afgeleiden singulier zijn. We kunnen deze singuliere punten opvatten als punten waar de grenslaag ontstaat (zie [6]).

Het is dan nodig om in de omgeving van zo'n punt beide coördinaten "op te blazen":

$$r = \rho \varepsilon^\alpha, \quad z = \zeta \varepsilon^\beta, \quad (\alpha, \beta > 0).$$

Stellen we in de getransformeerde vergelijking  $\varepsilon = 0$ , dan ontstaat een zogenaamde limietvergelijking

$$L^{(\alpha, \beta)}[\Psi^{(\alpha, \beta)}(\rho, \zeta)] = 0,$$

waarbij een zodanig verband tussen  $\alpha$  en  $\beta$  gekozen is dat het resultaat zinvol is. De oplossing van deze vergelijking moet weer aan rand- en aansluitingsvoorwaarden voldoen en wordt *formele locale benadering* genoemd.

### Definities

Een formele locale benadering  $\Psi^{(\alpha, \beta)}$  is bevat in  $\Psi^{(\gamma, \delta)}$  als

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi^{(\gamma, \delta)}(\varepsilon^{\alpha-\gamma} \rho, \varepsilon^{\beta-\delta} \zeta) = \psi^{(\alpha, \beta)}(\rho, \zeta).$$

Een formele locale benadering heet *significant* als hij niet bevat is in enige andere formele locale benadering.

Tot slot wordt uit de reguliere benadering en de significante locale benaderingen een uniforme benadering geconstrueerd, waarvan de geldigheid met behulp van de stellingen uit paragraaf 3 bewezen dient te worden.

Men spreekt van een *gewone grenslaag* als de grenslaagterm oplossing is van een gewone differentiaalvergelijking en van een *parabolische grenslaag* als de betreffende vergelijking een parabolische differentiaalvergelijking is.

Indien de kromme, waarlangs de grenslaagbenadering van kracht is, geen deel uitmaakt van  $\partial G$ , dan spreekt men van een *vrije grenslaag*.

### 5. De parabolische grenslaag

De in paragraaf 4 beschreven procedure zullen we nu toepassen, eerst voor het geval  $\mu = 0$  en later voor  $\mu > 0$ . Zij  $\mu = 0$ , dan kan het probleem (1.1)-(1.4) geschreven worden als

$$(5.1) \quad \begin{cases} \epsilon \Delta P - b \frac{\partial P}{\partial y} - cP = 0, \\ P(x,0) = 0, \quad P(0,y) = f(y). \end{cases}$$

De oplossing  $P_0$  van de gereduceerde vergelijking

$$b \frac{\partial P_0}{\partial y} + cP_0 = 0,$$

die voldoet aan  $P_0(x,0) = 0$ , is juist  $P_0(x,y) = 0$ . De lijn  $x=0$  is een karakteristieke lijn van de gereduceerde vergelijking. Het is duidelijk dat de reguliere benadering  $P_0$  niet voldoet aan de randconditie voor  $x=0$ .

Invoeren van de locale coördinaat

$$\xi = x\epsilon^{-\alpha}$$

in vergelijking (5.1) levert

$$\epsilon^{1-2\alpha} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \epsilon \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - b \frac{\partial P}{\partial y} - cP = 0,$$

waaruit blijkt dat we  $\alpha = \frac{1}{2}$  moeten kiezen.

Aan de limietvergelijking

$$\frac{\partial^2 P^{(\frac{1}{2})}}{\partial \xi^2} - b \frac{\partial P^{(\frac{1}{2})}}{\partial y} - cP^{(\frac{1}{2})} = 0,$$

alsmede aan de randconditie

$$P^{(\frac{1}{2})}(0,y) = f(y)$$

en de aansluitingsvoorwaarde

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} P^{(\frac{1}{2})}(\xi, y) = 0$$

wordt voldaan door de bekende (zie bv. [4]) parabolische grenslaagfunctie

$$(5.2) \quad P^{(\frac{1}{2})}(\xi, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{b}{y}}}^{\infty} e^{-\tau^2 - \frac{c\xi^2}{4\tau^2}} f(y - \frac{\xi^2 b}{4\tau^2}) d\tau.$$

De grenslaag "ontstaat" in de oorsprong (zie [4],[6]).

Invoeren van de locale coördinaten

$$\xi = x\epsilon^{-\alpha}, \quad \eta = y\epsilon^{-\beta}$$

geeft

$$\epsilon^{1-2\alpha} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \epsilon^{1-2\beta} \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} - b\epsilon^{-\beta} \frac{\partial P}{\partial \eta} - cP = 0.$$

Keuze van  $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ) geeft als limietvergelijking

$$\frac{\partial^2 P^{(\alpha, \beta)}}{\partial \xi^2} - b \frac{\partial P^{(\alpha, \beta)}}{\partial \eta} = 0$$

met als voorwaarden

$$P^{(\alpha, \beta)}(0, \eta) = f(0), \quad P^{(\alpha, \beta)}(\xi, 0) = 0.$$

Hieraan voldoet

$$(5.3) \quad P^{(\alpha, \beta)}(\xi, \eta) = f(0) \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{b}{\eta}}\right),$$

waarbij

$$\operatorname{erfc}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau$$

de complementaire error-functie is. Zoals evenwel uit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P^{(\frac{1}{2})}(\epsilon^{\frac{1}{2}\beta} \xi, \epsilon^{\beta} \eta) = f(0) \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{b}{\eta}}\right)$$



blijkt, is deze locale benadering niet significant.

Keuze van  $\alpha = \beta = 1$  geeft als limietvergelijking

$$\frac{\partial^2 P^{(1,1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P^{(1,1)}}{\partial \eta^2} - b \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0$$

en als voorwaarden

$$P^{(1,1)}(0, \eta) = f(0), \quad P^{(1,1)}(\xi, 0) = 0.$$

Dit probleem is een vereenvoudigde vorm van het oorspronkelijke probleem (5.1) en de oplossing volgt onmiddellijk uit specialisatie van de exacte oplossing (2.7):

$$(5.4) \quad P^{(1,1)}(\xi, \eta) = \frac{f(0)}{\pi i} e^{\frac{b\eta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{b}{2}(\xi \cosh u - i\eta \sinh u)} \frac{\sinh u \cosh u}{1 + \sinh^2 u} du.$$

In de appendix wordt bewezen dat aan de aansluiting bij  $P_0$  en  $P^{(\frac{1}{2})}$  is voldaan.

We hebben nu alle "bouwstenen" voor een eerste orde asymptotische benadering geconstrueerd.

## 6. De vrije grenslaag

Indien we in vergelijking (1.1)  $\mu > 0$  nemen, ontstaat een enigszins andere situatie. De oplossing van de gereduceerde vergelijking

$$\mu \frac{\partial V_0}{\partial x} + b \frac{\partial V_0}{\partial y} + cV_0 = 0$$

kan nu voldoen aan alle randvoorwaarden, namelijk

$$(6.1) \quad \begin{cases} {}_1V_0(x,y) = 0, & \mu y - bx < 0, \\ {}_2V_0(x,y) = f\left(\frac{\mu y - bx}{\mu}\right) e^{-\frac{c}{\mu}x}, & \mu y - bx > 0. \end{cases}$$

Maar de discontinuïteit in de randvoorwaarden (nl.  $f(0) \neq 0$ ) plant zich voort langs de karakteristieke lijn door de oorsprong. Op grond van het feit dat de oorspronkelijke differentiaalvergelijking (1.1) elliptisch is, mogen we verwachten dat de oplossing binnen  $G$  glad verloopt. De lijn  $\mu y = bx$  is dan ook van speciaal belang en we voeren de volgende locale coördinaat  $t$  in:

$$(6.2) \quad bx - \mu y = t\varepsilon^\alpha.$$

Transformatie van vergelijking (1.1) leert dat  $\alpha = \frac{1}{2}$  gekozen moet worden, waarna de volgende limietvergelijking ontstaat:

$$(\mu^2 + b^2) \frac{\partial^2 V^{(\frac{1}{2})}}{\partial t^2} - b \frac{\partial V^{(\frac{1}{2})}}{\partial y} - cV^{(\frac{1}{2})} = 0.$$

De oplossing hiervan dient aan de aansluitingsvoorwaarden

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} V^{(\frac{1}{2})}(t,y) &= \lim_{(\mu y - bx) \rightarrow 0} {}_1V_0(x,y) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} V^{(\frac{1}{2})}(t,y) &= \lim_{(\mu y - bx) \rightarrow 0} {}_2V_0(x,y) = f(0) e^{-\frac{c}{b}y} \end{aligned}$$

te voldoen. Zoals men eenvoudig nagaat heeft

$$(6.3) \quad v^{(\frac{1}{2})}(t, y) = \frac{f(0)}{2} e^{-\frac{c}{b}y} \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{2\sqrt{\frac{\mu^2 + b^2}{b}}y}\right)$$

alle vereiste eigenschappen.

Ook in dit geval "ontstaat" de grenslaag in de oorsprong. Invoering van een tweede locale coördinaat

$$y = \eta \varepsilon^\beta$$

levert op dezelfde wijze als in paragraaf 5 voor  $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta$ ,  $0 < \beta < 1$ , de formele locale benadering

$$(6.4) \quad v^{(\alpha, \beta)}(t, \eta) = \frac{f(0)}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{2\sqrt{\frac{\mu^2 + b^2}{b}}\eta}\right)$$

en wederom volgt uit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v^{(\frac{1}{2})}(\varepsilon^{\frac{1}{2}\beta} t, \varepsilon^\beta \eta) = \frac{f(0)}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{2\sqrt{\frac{\mu^2 + b^2}{b}}\eta}\right)$$

dat deze benadering niet significant is.

In plaats van vervolgens  $\alpha = \beta = 1$  te nemen, gaan we over op

$$x = \xi \varepsilon, \quad y = \eta \varepsilon$$

om ingewikkelde uitdrukkingen voor de randen te vermijden. Als limietvergelijking vinden we

$$\frac{\partial^2 v^{(1,1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v^{(1,1)}}{\partial \eta^2} - \mu \frac{\partial v^{(1,1)}}{\partial \xi} - b \frac{\partial v^{(1,1)}}{\partial \eta} = 0$$

met als voorwaarden

$$v^{(1,1)}(0, \eta) = 0, \quad v^{(1,1)}(\xi, 0) = f(0).$$

Specialisatie van (2.7) voor dit geval levert

$$(6.5) \quad v^{(1,1)}(\xi, \eta) = \frac{f(0)}{\pi i} e^{\frac{\mu \xi + b \eta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{\mu^2 + b^2}}{2} (\xi \cosh u - i \eta \sinh u)} \cdot \frac{\sinh u \cosh u}{\frac{b^2}{\mu^2 + b^2} + \sinh^2 u} du.$$

In de appendix wordt bewezen dat  $v^{(1,1)}$  voldoet aan de aansluiting met  $v_0$  en  $v^{(\frac{1}{2})}$ .

## 7. Vergelijking van vrije en parabolische grenslaag

Op grond van hetgeen we in paragraaf 3 hebben bewezen, zouden we nu verwachten dat het verschil van de locale benaderingen, die we in paragraaf 5 en 6 hebben geconstrueerd, voorzover zij een gemeenschappelijk geldigheidsgebied hebben,  $O(\epsilon)$  wordt voor  $\mu$  voldoende klein.

Men ziet echter eenvoudig in dat hieraan door de ons nu ter beschikking staande benaderingen niet wordt voldaan; immers in de vrije grenslaag speelt alleen  $f(0)$  een rol terwijl in de parabolische grenslaag alle waarden van  $f$  van belang zijn. Er geldt met andere woorden

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{\mu \downarrow 0} \Phi_{\epsilon, \mu} \neq \lim_{\mu \downarrow 0} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \Phi_{\epsilon, \mu}$$

en uit deze relatie blijkt meteen de analogie met het bekende, kenmerkende, probleem uit de singuliere storingstheorie (zie paragraaf 3), nu echter met een parameter in de rol die anders door de coördinaten wordt gespeeld.

Vanuit deze analogie komen we op de gedachte dat we het limietproces  $\mu \downarrow 0$  niet onafhankelijk van  $\epsilon$  mogen voltrekken en dat we de parameter  $\mu$  in de buurt van  $\mu=0$  moeten "opblazen" om te kunnen zien hoe de overgang zich voltrekt.

Het is onmiddellijk duidelijk dat, indien we ook  $\mu$  van  $\epsilon$  afhankelijk maken, er nieuwe benaderingen ontstaan, omdat er nieuwe limietvergelijkingen ontstaan. In de volgende paragrafen zullen we onderzoeken welke deze nieuwe benaderingen zijn.

### 8. De bijna vrije grenslaag

We definiëren een "locale" parameter  $a$  door

$$(8.1) \quad \mu = a\varepsilon^\gamma, \quad (\gamma > 0).$$

De hoek tussen de positieve  $y$ -as en de karakteristieke lijn door de oorsprong is dan  $O(\varepsilon^\gamma)$ . We beperken ons in deze paragraaf tot  $\gamma < \frac{1}{2}$ , aangezien, zoals in het volgende zal blijken, voor  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  andere limietvergelijkingen optreden.

De gereduceerde vergelijking

$$b \frac{\partial T_0}{\partial y} + cT_0 = 0$$

geeft aanleiding tot de reguliere benadering  $T_0(x,y) = 0$ .

De invloed van de functie  $f(y)$  is beperkt tot het gebied tussen de positieve  $y$ -as en de karakteristieke lijn door de oorsprong. Dit blijkt als we de locale coördinaat  $\xi$  invoeren met

$$x = \xi \varepsilon^\gamma.$$

Aan de limietvergelijking

$$a \frac{\partial T^{(\gamma)}}{\partial \xi} + b \frac{\partial T^{(\gamma)}}{\partial y} + cT^{(\gamma)} = 0$$

en de randvoorwaarde  $T^{(\gamma)}(0,y) = f(y)$  wordt voldaan door

$$(8.2) \quad T^{(\gamma)}(\xi,y) = f\left(\frac{ay-b\xi}{a}\right) e^{-\frac{c}{a}\xi}, \quad ay-b\xi > 0.$$

De structuur van deze benadering is dezelfde als van  ${}_2V_0$  in (6.1), maar hier hebben we te maken met een grenslaagterm. Het nogal ongewone feit, dat een grenslaagterm in een singulier storingsprobleem voor een tweede orde differentiaalvergelijking oplossing is van een eerste orde limietvergelijking, is geheel en al te wijten aan onze "tweede storing" in de operator  $D_\mu$ .

Om de aansluiting van  $T^{(\gamma)}$  aan  $T_0$  te onderzoeken voeren we weer de locale coördinaten  $t$  en  $\eta$  in:

$$(8.3) \quad bx - a\epsilon^\gamma y = t\epsilon^\alpha, \quad y = \eta\epsilon^\beta,$$

en wederom blijkt dat we  $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta$ ,  $0 \leq \beta < 1$ , moeten kiezen. Er is evenwel een belangrijk verschil. In het geval van de vrije grenslaag ( $\gamma=0$ ) werd de "matching" tot stand gebracht door

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} v^{(\frac{1}{2})}(t, y)$$

aan te passen, en hiertegen bestond geen bezwaar, omdat de rand van  $G$  niet bereikt werd. In de locale coördinaten  $t$  en  $\eta$  wordt de lijn  $x=0$  weergegeven door

$$t = -a\epsilon^{\gamma - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta} \eta$$

zodat voor  $\beta = 1-2\gamma$  een verandering in de situatie optreedt. Voor  $1-2\gamma \leq \beta < 1$  moeten we een randvoorwaarde opleggen in plaats van een aansluitingsvoorwaarde.

Het volgende schema van voorwaarden brengt de overgang van vrije naar niet vrije grenslaag aan het licht:

$$\beta = 0 \quad : \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} T^{(\frac{1}{2})}(t, y) = f(0) e^{-\frac{c}{b}y},$$

$$0 < \beta < 1-2\gamma \quad : \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} {}_1T^{(\alpha, \beta)}(t, \eta) = f(0),$$

$$\beta = 1-2\gamma \quad : \quad {}_2T^{(1-\gamma, 1-2\gamma)}(-a\eta, \eta) = f(0),$$

$$1-2\gamma < \beta < 1 \quad : \quad {}_3T^{(\alpha, \beta)}(0, \eta) = f(0).$$

De bijbehorende limietvergelijkingen zijn, respectievelijk,

$$b^2 \frac{\partial T^{(\frac{1}{2})}}{\partial t^2} - b \frac{\partial T^{(\frac{1}{2})}}{\partial y} - c T^{(\frac{1}{2})} = 0 \quad \text{voor } \beta=0,$$

$$b^2 \frac{\partial^2 T^{(\alpha, \beta)}}{\partial t^2} - b \frac{\partial T^{(\alpha, \beta)}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{voor } 0 < \beta < 1.$$

Tezamen geeft dit aanleiding tot de volgende locale benaderingen: (met name (8.5) wordt het eenvoudigst verkregen met behulp van Laplace transformatie)

$$(8.4.a) \quad T^{(\frac{1}{2})}(t, y) = \frac{f(0)}{2} e^{-\frac{c}{b}y} \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{2\sqrt{by}}\right)$$

$$(8.4.b) \quad {}_1T^{(\alpha, \beta)}(t, \eta) = \frac{f(0)}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{2\sqrt{b\eta}}\right) \quad \text{"vrije grenslaag",}$$

$$(8.5) \quad {}_2T^{(1-\gamma, 1-2\gamma)}(t, \eta) = \frac{f(0)}{2} \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{2\sqrt{b\eta}}\right) + e^{\frac{at+a^2\eta}{b}} \operatorname{erfc}\left(\frac{t+2a\eta}{2\sqrt{b\eta}}\right) \right\}$$

"bijna vrije grenslaag",

$$(8.6) \quad {}_3T^{(\alpha, \beta)}(t, \eta) = f(0) \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{2\sqrt{b\eta}}\right) \quad \text{"niet vrije grenslaag".}$$

Zoals men eenvoudig nagaat gelden de volgende betrekkingen:

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} T^{(\frac{1}{2})}(\epsilon^{\frac{1}{2}\delta} t, \epsilon^{\delta} \eta) = {}_1T^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\delta, \delta)}(t, \eta), \quad (0 < \delta < 1-2\gamma),$$

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} {}_2T^{(1-\gamma, 1-2\gamma)}(\epsilon^{-\frac{1}{2}\delta} t, \epsilon^{-\delta} \eta) = {}_1T^{(1-\gamma-\frac{1}{2}\delta, 1-2\gamma-\delta)}(t, \eta), \quad (0 < \delta < 1-2\gamma),$$

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} {}_2T^{(1-\gamma, 1-2\gamma)}(\epsilon^{\frac{1}{2}\delta} t, \epsilon^{\delta} \eta) = {}_3T^{(1-\gamma+\frac{1}{2}\delta, 1-2\gamma+\delta)}(t, \eta), \quad (0 < \delta < 2\gamma).$$

Hieruit volgt dat de "niet vrije grenslaag" alsmede het gedeelte van de "vrije grenslaag" met  $0 < \beta < 1-2\gamma$  bevat zijn in de "bijna vrije grenslaag" en dat aan de aansluitingsvoorwaarden is voldaan.

De hoekpuntsbenadering is voor dit geval volkomen identiek aan  $P^{(1,1)}$  in (5.4).



### 9. De gegeneraliseerde parabolische grenslaag

Voor  $\gamma = \frac{1}{2}$  gaat het schema van linker-voorwaarden voor de grenslaag over in

$$\beta = 0 \quad : \quad G^{(\frac{1}{2})}(-ay, y) = f(y),$$

$$0 < \beta < 1 : \quad G^{(\alpha, \beta)}(0, \eta) = f(0).$$

Dit betekent dat de grenslaag geen vrij deel meer bezit en dat de gehele rand  $x=0$  binnen de laag komt te liggen. We kunnen hieraan ook uiting geven door als locale coördinaat  $\xi$ , met

$$x = \xi \varepsilon^\alpha,$$

te kiezen in plaats van  $t$  uit paragraaf 8, aangezien  $\xi$  en  $t$  in een eerste orde benadering equivalent zijn.

Uitgedrukt in de  $\xi, \eta$ -coördinaten vinden we voor  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 0$  de limiet-vergelijking

$$\frac{\partial^2 G^{(\frac{1}{2})}}{\partial \xi^2} - a \frac{\partial G^{(\frac{1}{2})}}{\partial \xi} - b \frac{\partial G^{(\frac{1}{2})}}{\partial y} - c G^{(\frac{1}{2})} = 0.$$

De oplossing die aan alle voorwaarden voldoet is

$$(9.1) \quad G^{(\frac{1}{2})}(\xi, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{a}{2}\xi} \int_{\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{b}{y}}}^{\infty} e^{-(\tau^2 + \frac{4c+a^2}{4}\frac{\xi^2}{4\tau^2})} \cdot f(y - \frac{\xi^2 b}{4\tau^2}) d\tau$$

"gegeneraliseerde parabolische grenslaag".

Voor  $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta$ ,  $0 < \beta < 1$ , vinden we weer

$$(9.2) \quad G^{(\alpha, \beta)}(\xi, \eta) = f(0) \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{b}{\eta}}\right)$$

terwijl ook nu

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} G^{(\frac{1}{2})}(\varepsilon^{\frac{1}{2}\delta} \xi, \varepsilon^{\delta} \eta) = G^{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta, \delta)}(\xi, \eta).$$

De hoekpunts-benadering wordt wederom gegeven door  $P^{(1,1)}$  in (5.4).

We merken tot slot op dat voor  $\gamma > \frac{1}{2}$  de situatie in geen enkel opzicht verschilt van het geval  $\mu=0$ , de parabolische grenslaag.

### 10. Vergelijking van de verschillende grenslagen

Nu we de volledige verzameling van locale benaderingen voor verschillende waarden van  $\gamma$  geconstrueerd hebben, zullen we een overzicht geven van de onderlinge relaties. In schema I (blz. 30) zijn deze relaties weergegeven door gerichte pijlen.

De betekenis van zo'n gerichte pijl is de volgende. Stel  $W_{\gamma_1, a_1}$  en  $W_{\gamma_2, a_2}$  zijn locale benaderingen voor  $\mu = a_1 \epsilon^{\gamma_1}$  respectievelijk  $\mu = a_2 \epsilon^{\gamma_2}$ . Dan wil  $W_{\gamma_1, a_1} \rightarrow W_{\gamma_2, a_2}$  zeggen dat

$$(10.1) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W_{\gamma_1, a_1 \epsilon^{\gamma_2 - \gamma_1}} = W_{\gamma_2}$$

in het geldigheidsgebied van  $W_{\gamma_2}$ .

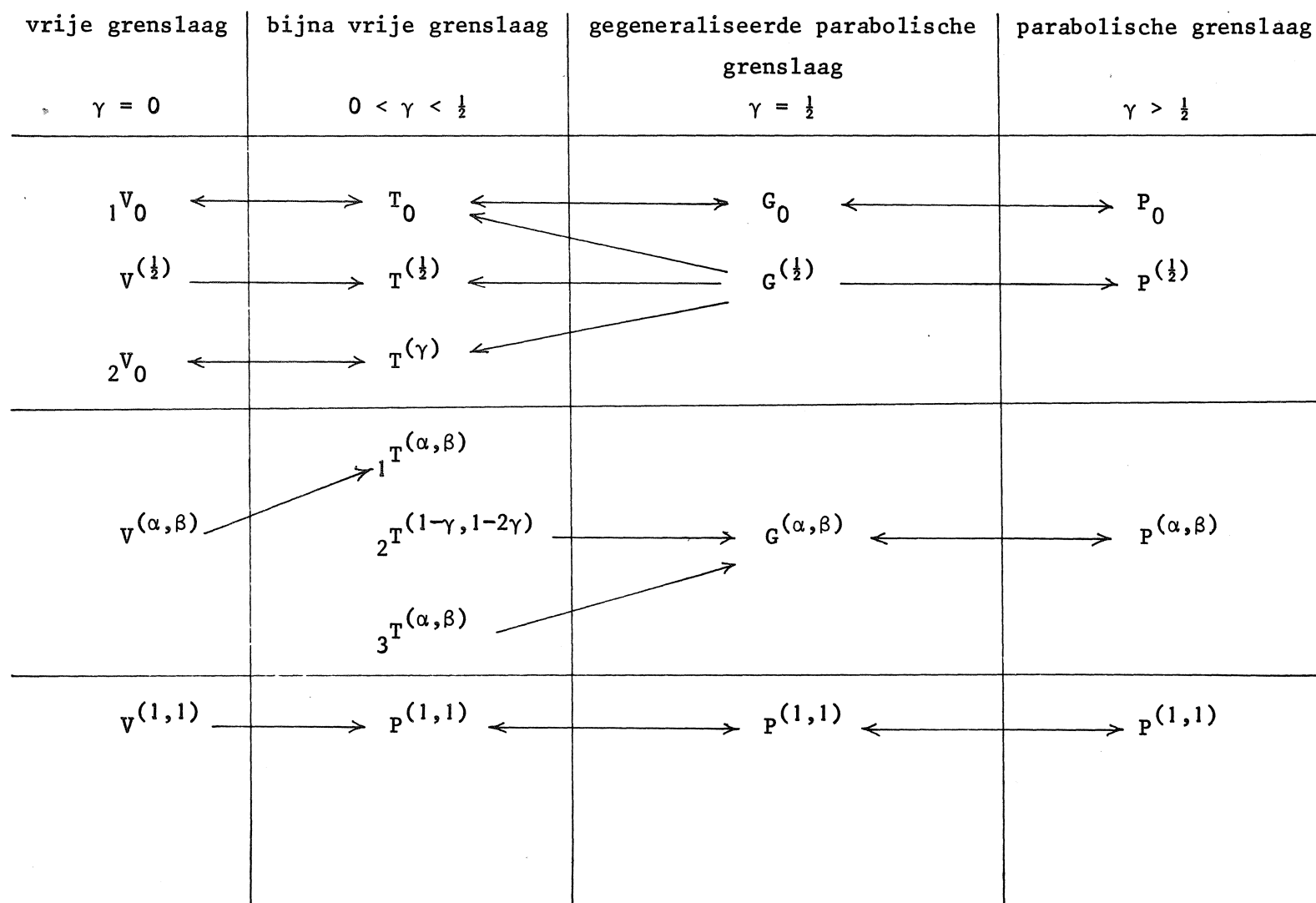
In termen van de analogie, die er bestaat tussen de rol van de parameter  $\mu$  hier en de locale coördinaten in paragraaf 4, zou men kunnen zeggen dat  $W_{\gamma_2}$  "bevat" is in  $W_{\gamma_1}$ .

Op grond van hetgeen wij in paragraaf 3 bewezen hebben, mag men nu verwachten dat elke locale benadering begin- dan wel eindpunt van tenminste één pijl zal zijn, en zoals uit schema I blijkt is hieraan ook voldaan. Met opzet spreken we niet alleen over significante locale benaderingen. Het idee van significante benaderingen is gebaseerd op limietprocessen met betrekking tot de locale coördinaten. Deze limietprocessen zijn niet altijd verwisselbaar met een limietproces met betrekking tot de parameter  $\mu$  als in (10.1). In schema I zijn dan ook locale benaderingen als  $V^{(\alpha, \beta)}$ ,  $G^{(\alpha, \beta)}$  en  $P^{(\alpha, \beta)}$  apart vermeld.

Zoals men eenvoudig nagaat zijn de relaties tussen de verschillende locale benaderingen vrijwel triviaal op één uitzondering na. Deze uitzondering betreft de pijlen die van  $G^{(\frac{1}{2})}$  naar respectievelijk  $T_0$ ,  $T^{(\frac{1}{2})}$  en  $T^{(\gamma)}$  gaan, en hiervan zullen wij het bewijs geven.

Stel

$$(10.2) \quad W(\xi, y) = G^{(\frac{1}{2})}(\xi, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{a}{2}\xi} \int_{\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{b}{y}}}^{\infty} e^{-(\tau^2 + \frac{4c+a^2}{4} \frac{\xi^2}{4\tau^2})} f(y - \frac{\xi^2 b}{4\tau^2}) d\tau,$$



Schema I

en substitueer  $a = a^* \varepsilon^{-\delta}$ , met  $\delta = \frac{1}{2} - \gamma_1 > 0$  (nl.  $0 < \gamma_1 < \frac{1}{2}$ ).

De transformatie  $\tau = \tau' \varepsilon^{-\delta}$  en een kleine herschrijving levert

$$(10.3) \quad W = e^{-\frac{c}{a^*} \xi \varepsilon^\delta + \alpha_1} \frac{2}{\varepsilon^\delta \sqrt{\pi}} \int_{\frac{\varepsilon^\delta \xi}{2} \sqrt{\frac{b}{y}}}^{\infty} e^{-(\tau' - \frac{(a^* + \alpha_2) \xi \varepsilon^\delta}{4 \tau'})^2 \varepsilon^{-2\delta}} f(y - \frac{(\xi \varepsilon^\delta)^2 b}{\tau'^2}) d\tau',$$

met  $\alpha_1 = O(\varepsilon^{3\delta})$  en  $\alpha_2 = O(\varepsilon^{2\delta})$ .

Als  $\xi \varepsilon^\delta \rightarrow 0$  als  $\varepsilon \rightarrow 0$  dan volgt  $W \sim f(y)$ .

Stel vervolgens  $\xi \varepsilon^\delta = \xi^*$  ( $\xi^* = O(1)$ ) en

$$\tau' - \frac{(a^* + \alpha_2) \xi^*}{4 \tau'} = q,$$

dan

$$(10.4) \quad W = e^{-\frac{c}{a^*} \xi^* + \alpha_1} \frac{2}{\varepsilon^\delta \sqrt{\pi}} \int_{\frac{b \xi^* - a^* y}{2 \sqrt{b y}}}^{\infty} e^{-q^2 \varepsilon^{-2\delta}} f(y - Q(q)) \frac{d\tau}{dq}(q) dq$$

met

$$Q(q) = \frac{\xi^{*2} b}{2q^2 + 2q \sqrt{q^2 + (a^* + \alpha_2) \xi^*} + (a^* + \alpha_2) \xi^*}$$

en

$$\frac{d\tau}{dq}(q) = \frac{1}{2} + \frac{q}{2 \sqrt{q^2 + (a^* + \alpha_2) \xi^*}}.$$

Uit deze representatie blijkt dat voor  $\varepsilon \rightarrow 0$  het resultaat er van afhankelijk is of  $q=0$  in het integratie interval ligt of niet. Met name volgt

$$(10.5) \quad W \sim 0, \quad b \xi^* - a^* y > 0,$$

$$(10.6) \quad W \sim e^{-\frac{c}{a^*} \xi^*} f(y - Q(0)) \frac{d\tau}{dq}(0) = e^{-\frac{c}{a^*} \xi^*} f\left(\frac{a^* y - b \xi^*}{a^*}\right), \quad b \xi^* - a^* y < 0.$$

Om deze overgang nader te beschouwen definiëren we

$$b\xi^* - a^*y = t\epsilon^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad t=O(1).$$

De transformatie  $q = p\epsilon^\alpha$  levert

$$W = e^{-\frac{c}{b}y + \alpha_3} \frac{2}{\sqrt{\pi} \epsilon^{\delta-\alpha}} \int_{\frac{t}{2\sqrt{by}}}^{\infty} e^{-p^2 \epsilon^{2\alpha-2\delta}} f(y - Q(p)) \frac{d\tau}{dq}(p) dp,$$

met  $\alpha_3 = O(\epsilon^{\min(3\delta, \alpha)})$ .

Als  $\alpha < \delta$  vinden we dezelfde overgang als eerst.

Met  $\alpha = \delta$  zijn alleen  $Q$  en  $\frac{d\tau}{dq}$  afhankelijk van  $\epsilon$ :

$$Q(p) = \frac{\xi^{*2} b}{2p^2 \epsilon^{2\alpha} + 2p\epsilon^\alpha \sqrt{p^2 \epsilon^{2\alpha} + (a^* + \alpha_2)\xi^*} + (a^* + \alpha_2)\xi^*} \sim \frac{b}{a^*} \xi^* \sim y,$$

$$\frac{d\tau}{dq}(p) = \frac{1}{2} + \frac{p\epsilon^\alpha}{2\sqrt{p^2 \epsilon^{2\alpha} + (a^* + \alpha_2)\xi^*}} \sim \frac{1}{2},$$

zodat

$$(10.7) \quad W \sim \frac{f(0)}{2} e^{-\frac{c}{b}y} \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{2\sqrt{by}}\right).$$

Voor  $\alpha > \delta$ , tot slot, vinden we

$$W \sim \frac{f(0)}{2} e^{-\frac{c}{b}y}$$

en dit geeft geen verdere informatie, aangezien hetzelfde resultaat bereikt wordt door limiet  $t \rightarrow 0$  in (10.7) te nemen.

Om het geheel duidelijk te maken herschrijven we de relatie

$$b\xi^* - a^*y = t\epsilon^\delta.$$

Substitutie van  $\delta = \frac{1}{2} - \gamma_1$ ,  $\xi^* = \xi \varepsilon^{\frac{1}{2} - \gamma_1}$ ,  $\xi = x \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$  gevolgd door vermenigvuldiging met  $\varepsilon^{\gamma_1}$  geeft

$$bx - a^* \varepsilon^{\gamma_1} y = t \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Vergelijking van (10.5), (10.6) en (10.7) met respectievelijk  $T_0 = 0$ ,  $T^{(\gamma)}$  uit (8.2) en  $T^{(\frac{1}{2})}$  uit (8.4a) toont aan dat de pijlen in schema I juist zijn.

## 11. Conclusies

In het singuliere storingsprobleem (1.1) - (1.4) kan men de coëfficiënt  $\mu$  opvatten als een parameter. Deze parameter is dan een maat voor de hoek tussen de karakteristieken van de gereduceerde vergelijking en de rand  $x = 0$ . In paragraaf 3 hebben wij aangetoond dat het probleem regulier is met betrekking tot  $\mu$ .

In paragraaf 5 hebben we een eerste orde asymptotische benadering voor de oplossing geconstrueerd voor het geval dat de rand  $x = 0$  tevens een karakteristieke lijn is ( $\mu=0$ ) en in paragraaf 6 deden we dat voor  $\mu > 0$ . Laten we in de in paragraaf 6 gevonden benaderingen  $\mu$  naar nul gaan, dan komt het resultaat niet overeen met dat wat we in paragraaf 5 vonden. Hieruit blijkt dat voor  $\varepsilon \downarrow 0$  de oplossing niet-uniform convergeert met betrekking tot  $\mu$ . Naar analogie van de werkwijze bij het onderzoek van niet-uniforme convergentie met betrekking tot de coördinaten, hebben we een "locale" (i.e. van  $\varepsilon$  afhangende) parameter ingevoerd. Het bleek zodoende mogelijk een bevredigende analyse van de overgang van het ene naar het andere geval te maken.

Voor dit speciale probleem is dus aangetoond dat de belangrijkheid van het al dan niet samenvallen van karakteristieken en randen berust op de (voor een singulier storingsprobleem kenmerkende) niet-uniformiteit van de convergentie van de oplossing voor  $\varepsilon \downarrow 0$  met betrekking tot een andere grootheid dan de coördinaten. Het lijkt ons dat deze gedachte generaliseerd kan worden voor algemene singuliere storingsproblemen voor lineaire tweede orde elliptische differentiaalvergelijkingen.



## Appendix

In deze appendix zullen wij laten zien dat de hoekpuntsbenaderingen (5.4) en (6.5) aan de vereiste aansluitingsvoorwaarden voldoen. Hiertoe dienen we het asymptotische gedrag van de integraal

$$(A1) \quad I = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{\mu^2+b^2}}{2} (\xi \text{chu} - i \eta \text{shu})} \frac{\frac{\text{shu}}{2} \frac{\text{chu}}{2}}{\frac{b^2}{\mu^2+b^2} + \text{sh}^2 u} du$$

voor  $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \rightarrow \infty$  te bepalen.

Zij

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \theta, & \eta &= \rho \sin \theta, \\ \omega &= \frac{\sqrt{\mu^2+b^2}}{2}, & \theta_0 &= \arctg\left(\frac{b}{\mu}\right), \end{aligned}$$

(merk op dat  $\theta_0$  de hoek is tussen de karakteristieke lijnen en de positieve x-as), dan volgt

$$(A2) \quad I = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega \rho \text{ch}(u-i\theta)} \frac{\frac{\text{shu}}{2} \frac{\text{chu}}{2}}{\text{sh}(u+i\theta_0) \text{sh}(u-i\theta_0)} du$$

met  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  en  $0 < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ .

In [15] en [16] wordt uitvoerig op de asymptotische evaluatie van soortgelijke integralen ingegaan. Mits men speciale aandacht besteedt aan de polen van de integrand, is het mogelijk de zadelpuntsmethode toe te passen. Wij zullen ons hier beperken tot het vermelden van resultaten.

Zij eerst  $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$  (i.e.  $\mu \neq 0$ ), dan

$$\text{Res}_{u=i\theta_0} \frac{\frac{\text{shu}}{2} \frac{\text{chu}}{2}}{\text{sh}(u+i\theta_0) \text{sh}(u-i\theta_0)} = \frac{1}{2}$$

en

$$I \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} e^{-\omega \rho \cos(\theta - \theta_0)} \text{erfc}(\sqrt{2\omega \rho} \sin \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta)).$$

Substitutie hiervan in (6.5) levert

$$v^{(1,1)}(\rho, \theta) \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \frac{f(0)}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{2\omega\rho} \sin \tfrac{1}{2}(\theta_0 - \theta))$$

zodat op grond van

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} v^{(1,1)}(\rho, \theta) = 0 \quad \text{voor } \theta < \theta_0,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} v^{(1,1)}(\rho, \theta) = f(0) \quad \text{voor } \theta > \theta_0,$$

aan de "matching"-voorwaarden met respectievelijk  ${}_1V_0$  en  ${}_2V_0$  uit (6.1) voldaan is.

Met  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  volgt uit (6.2)

$$2\omega r \sin(\theta_0 - \theta) = t_\varepsilon^\alpha,$$

zodat we voor  $v^{(\frac{1}{2})}$  in (6.3) kunnen schrijven

$$v^{(\frac{1}{2})}(r, \theta) = \frac{f(0)}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{2\omega \frac{r}{\varepsilon} \cos \theta_0}{\cos \theta} \sin(\theta_0 - \theta)\right),$$

en dit is na de identificatie  $\rho = \frac{r}{\varepsilon}$ , onder de voorwaarde  $\theta \approx \theta_0$ , identiek aan  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} v^{(1,1)}(\rho, \theta)$ .

Zij vervolgens  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  ( $\mu=0$ ), dan gaat (A2) over in

$$(A3) \quad I = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega\rho \operatorname{ch}(u-i\theta)} \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} du.$$

Er vallen nu twee polen samen

$$\operatorname{Res}_{u=\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} = 1,$$

$$I \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\omega\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{2})} \operatorname{erfc}(\sqrt{2\omega\rho} \sin \tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi}{2} - \theta))$$

en dat levert precies de factor 2 voor de aansluiting bij  $P^{(\frac{1}{2})}$ . Dus ook in dit geval is aan de noodzakelijke voorwaarden voldaan.

# Literatuur

- [1] C. Comstock, *Boundary layers for almost characteristic boundaries*, J. Math. Anal. Appl. 22 (1968), 54-61.
- [2] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Vol. II, Interscience Publishers, New York, 1962.
- [3] W. Eckhaus, *Boundary layers in linear elliptic singular perturbation problems*, SIAM Review 14 (1972), 225-270.
- [4] W. Eckhaus, E.M. de Jager, *Asymptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential equations of elliptic type*, Arch. Rat. Mech. and Anal. 23 (1966), 26-86.
- [5] J. Grasman, *On singular perturbations and parabolic boundary layers*, J. Eng. Math. 2 (1968), 163-172.
- [6] J. Grasman, *On the birth of boundary layers*, Math. Centre Tracts 36, Amsterdam, 1971.
- [7] J. Grasman, *An elliptic singular perturbation problem with almost characteristic boundaries*, Report TN 67/72, Math. Centre, Amsterdam, 1972.
- [8] J.K. Knowles, R.E. Messick, *On a class of singular perturbation problems*, J. Math. Anal. Appl. 9 (1964), 42-58.
- [9] P.A. Lagerstrom, R.G. Casten, *Basic concepts underlying singular perturbation techniques*, SIAM Review 14 (1972), 63-120.
- [10] H.A. Lauwerier, *Asymptotic Analysis I*, to appear in the series Math. Centre Tracts, Amsterdam, 1974.
- [11] J. Mauss, *Problèmes de perturbations singulières*, Thèse Dep. de Méchanique, Univ. de Paris, 1971.
- [12] R.E. O'Malley, *The first boundary value problem for certain linear elliptic differential equations involving two small parameters*, Arch. Rat. Mech. and Anal. 29 (1968), 66-74.
- [13] R.É. O'Malley, *Topics in singular perturbations*, Advances in Mathematics 2, Acad. Press, New York, 1968.

- [14] M.H. Protter, H.F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Prentice Hall, New Jersey, 1967.
- [15] N.M. Temme, *Analytical methods for a singular perturbation problem. The quarter plane*, Report TW 125/71, Math. Centre, Amsterdam, 1971.
- [16] N.M. Temme, *Analytical methods for a singular perturbation problem in a sector*, Report TN 74/73, Math. Centre, Amsterdam, 1973.